H2G2

Décomposition polaire

L 106 L 158
L 150 L 160
L 153 L 203
L 155

Th : L'application $\Psi : \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme

$$(H, U) \mapsto H.U$$

Démonstration : ① Mq Ψ est continue.

Comme $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}), U_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ groupe, l'application Ψ est bien définie,
De plus, par bilinéarité du produit matriciel, Ψ est continue par restriction.

② Mq Ψ est surjective.

Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. On considère $M.M^* \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, donc d'après le th spectral,
$\exists P \in U_n(\mathbb{C}), \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tq $M.M^* = P.\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^*$

On pose $H = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^* \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

De plus, H vérifie : $H^2 = P.\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i}^2) P^* = M.M^*$.

On pose $U = H^{-1}M$ de sorte que : $HU = M$.

On a : $U.U^* = H^{-1}M.M^*(H^{-1})^* = H^{-1}.H^2.H^{-1} = I_n$ donc $U \in U_n(\mathbb{C})$.

Ainsi, $M = HU$ avec $H \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ et $U \in U_n(\mathbb{C})$.

③ Mq Ψ est injective

Soit $(H', U') \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$ une autre décomposition : $M = H'U' = HU$
alors $M^* = U'^{-1}H' = U^{-1}H$ puis $M.M^* = H^2 = H'^2$.

Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ un polynôme interpolateur tq $\forall i \in [\![1, n]\!], Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$

On a : $H = P.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^* = P.\begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^* = P.Q(\mathrm{diag}(\lambda_i)).P^*$

$$H = Q(P.\mathrm{diag}(\lambda_i)P^*) = Q(MM^*) = Q(H'^2)$$

Or H' commute avec tout polynôme en H' donc avec $Q(H'^2)$ ainsi H' et H commutent.
D'après le th spectral, elles sont toutes les deux diagonalisables, donc H et H' sont codiagonalisables.

$\exists\, R \in GL_n(\mathbb{C}),\ \exists\, (a_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \exists\, (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tq : $\begin{cases} H = R\, \mathrm{diag}(a_i)\, R^{-1} \\ H' = R\, \mathrm{diag}(b_i)\, R^{-1} \end{cases}$

Or $H^2 = H'^2$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i^2 = b_i^2 \Rightarrow a_i = b_i$ car $a_i, b_i \geqslant 0$

Finalement, $H = H'$ et par suite, $U = U'$.

4 Mq Ψ bicontinue.

Ainsi Ψ est bijective, soit $\Psi^{-1} : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ sa réciproque.
Mq Ψ^{-1} est continue par caractérisation séquentielle.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(M_k) \in GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ tq $M_k \to M$.
Par surjectivité de Ψ, $\exists\, (H, U), (H_k, U_k) \in (\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times \mathcal{U}_n(\mathbb{C}))^{1+\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} M = HU \\ M_k = H_k U_k \end{cases}$

Mq $U_k \to U$.
Comme $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est compact, soit $Q \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ une valeur d'adhérence de (U_k)
ie il existe une extractrice φ tq : $U_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} Q$

alors $H_{\varphi(k)} = M_{\varphi(k)} \cdot U_{\varphi(k)}^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} MQ^{-1} = S \in \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

ainsi, on a : $M = HU = SQ$ avec $(H,U), (S,Q) \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$
Par injectivité de Ψ, on en déduit $Q = U$.

(U_k) possède une unique valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.

d'où $\lim\limits_{k\to\infty} U_k = U$

Par suite, $\lim\limits_{k\to\infty} H_k = MU^{-1} = H$

Finalement, $\lim\limits_{k\to\infty} (H_k, U_k) = (H, U)$: Ψ^{-1} continue en M.

ie Ψ est bicontinue.

Conclusion : Ψ est un homéomorphisme.